На правах рукописи

Юферова Галина Александровна

ПРИМЕНЕНИЕ ЛЕВНЕРОВСКИХ СЕМЕЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск - 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАО, профессор Александров Игорь Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Прохоров Дмитрий Валентинович (Саратовский государственный университет)

кандидат физико-математических наук, доцент Гулнора Долимджановна Садритдинова (Томский государственный архитектурно-строительный университет)

Ведущая организация: Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита состоится 22 июня 2009 года в 14 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 212.267.21 при Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина 36, аудитория 119 (главный корпус).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 14 мая 2009 года

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.627.21 при ТГУ, кандидат физико-математических наук, доцент А.Н. Малютина

0- 777550

Актуальность темы. В начале XX века классическая теория Вейерштрасса о последовательностях голоморфных функций пополнилась исследованиями Каратеодори о сходимости последовательности областей к ядру и соответствующих отображений к отображению на ядро. Эти результаты были обобщены на семейства, зависящие от вещественного параметра, и появилась возможность и необходимость исследовать дифференциальные свойства отображений относительно вещественного параметра. Первые исследования в этом направлении были выполнены Левнером[1] в 1923 году. Им был получен следующий результат. Пусть $\Delta \in \mathbb{C}$, $\Delta \neq \mathbb{C}$, – односвязная область в w-плоскости, содержащая точку $w=0$. Пусть $w=\gamma(\tau)$, $0 \le \tau \le \tau^0 < +\infty$, – простая жорданова дуга в Δ, начинающаяся в точке $\gamma(0) \in \Delta$, оканчивающаяся в точке $\gamma(\tau^0)$ границы области Δ и не проходящая через нуль. Обозначим отображение единичного круга $E=\{z \in \mathbb{C}; |z|<1\}$ на Δ с исключенной частью рассматриваемой дуги от $\gamma(0)$ до $\gamma(\tau)$ через $w=\Psi(\tau,z)$, $\Psi(0,z)=0$, $\Psi'_z(0,z)>0$. Всегда можно полагать, что $\Psi(\tau,z)=e^{\tau}z+\ldots$. Левнер показал, что $\Psi(\tau,z)$ имеет производную

$$\frac{\partial\Psi(\tau,z)}{\partial\tau}=z\frac{\partial\Psi(\tau,z)}{\partial z}\cdot\frac{\mu(\tau)+z}{\mu(\tau)-z},\ z\in E,$$

где $\mu(\tau)$ – точка на границе круга E, соответствующая подвижному концу разреза при отображении $\Psi(\tau,z)$. Полученную формулу можно рассматривать и изучать как дифференциальное уравнение. Из-за неизвестности $\Psi(0,E)$, $\Psi(\tau^0,E)$ более удобно исследовать уравнение для функции $\zeta(\tau,z)=F(\Psi(0,z),\tau)$, где $\tau\in[0,\tau^0)$, а $F(\tau,w)$ – функция, обратная к $\Psi(\tau,z)$ при фиксированном τ, то есть уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\zeta\frac{\mu(\tau)+\zeta}{\mu(\tau)-\zeta},\ \zeta(0,z)=z\in E. \qquad (*)$$

Плотный относительно равномерной сходимости внутри E подкласс класса S, то есть класса голоморфных однолистных отображений $f(z)$ круга E, удовлетворяющих условиям: $f(0)=0$, $f'(0)=1$, можно получить как множество отображений

$$f(z)=\lim_{\tau\to+\infty}e^{\tau}\zeta(\tau,z)=z+c_2z^2+\ldots,\ z\in E,$$

[1] Левнер К. (Lowner K.) Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildung des Einheitskreises// Math.Ann. – 1923. – T. 89. – C. 103 – 121.

где $\zeta(\tau,z)$ – решение уравнения (*) (уравнения Левнера) с непрерывной управляющей функцией $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)|=1$. Левнер, пользуясь (*), доказал неравенство $|c_3|\le 3$ на классе S, что было дополнительным фактом в пользу справедливости гипотезы Бибербаха[2]: $|c_n|\le n$ на S при любом $n\in\mathbb{N}$. На основе уравнения Левнера и исследований Г.М. Голузина[3,4], И.Е. Базилевича[5] сформировался один из методов геометрической теории функций комплексного переменного: метод параметрических представлений. П.П. Куфаревым[6,7,8], И.А. Александровым[9,10], В.А. Синевым, Г.Д. Садритдиновой[11,12] он был развит в направлении реализации конформных отображений (нахождение постоянных в интеграле Кристоффеля – Шварца, получение интегральных представлений подклассов класса S). И.А. Александров[13], В.И. Попов[14], С.А. Копанев[15], В.Я. Гутлянский[16] нашли области значений многих функционалов на

---

[2] Бибербах Л. (Bieberbach L.) Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, sitzungsber // Preuss. Akad. Wiss. Phys. – Math. Kl. – 1916. – Т. 138. – С. 940 – 955.

[3] Голузин Г.М. Дополнение к работе «О теоремах искажения в теории конформных отображений» // Матем. сб. – 1937. – Т. 2 (44):4. – С. 685 – 688.

[4] Голузин Г.М. О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций // Матеем. Сб. – 1948. – Т. 23 (65), №3. – С. 353 – 360.

[5] Базилевич И.Е. О теоремах искажения в теории однолистных функций// Матем. Сб. – 1951. – Т. 28(70) :2. – С. 283 – 292.

[6] Куфарев П.П. Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца – Кристоффеля // ДАН СССР. – 1947. – Т. 57. - № 6. – С. 535 – 537.

[7] Куфарев П.П. Одно замечание об уравнении Левнера // Доклады АН СССР. – 1947. – Т. 57. – С. 655 – 656.

[8] Куфарев П.П. Теорема о решениях одного дифференциального уравнения // Учен.зап.Томск.ун-та. – 1947. – Т. 5. – С. 20 – 21.

[9] Александров И.А., Гутлянский В.Я. К проблеме коэффициентов в теории однолистных функций // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 188, №2. – С. 266 -268.

[10] Александров И.А. Геометрические свойства однолистных функций // Труды Томского университета. – 1964. – Т. 175. – С. 28 – 38.

[11] Садритдинова Г.Д. Области с разрезами и свойства управляющих функций в уравнении Левнера // Тез. докл. междунар. конфер. по матем. и механике. Томск. ТГУ. – 2003.

[12] Садритдинова Г.Д. Уравнение Левнера с составным управлением // Вестник ТГУ. Математика. Кибернетика. Информатика. – 2004. № 284.

[13] Александров И.А. Об области значений некоторых функционалов в классе функций однолистных и регулярных в круге // Исслед.по совр.пробл.теории функций компл.переменного. М.: Физматгиз. – 1960. – С. 39 – 45.

[14] Попов В.И. Область значений одной системы функционалов на классе S // Труды Томского университета. – 1965. – Т. 182. – С. 107 – 132.

[15] Александров И.А., Копанев С.А. Область значений производной на классе голоморфных однолистных функций // Украинский математический журнал. – 1970. – Т. 5.

[16] Гутлянский В.Я. Параметрическое представление однолистных функций // ДАН СССР. 1970. Т.194. С. 750 – 753.

классе S, в том числе, область изменения $\ln f'(z_0)$ на S, П.П. Куфарев[17] и А.Э. Фалес[18] решили известную задачу М.А. Лаврентьева о дополнительных областях.

Более общее, чем уравнение Левнера, уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta P(\tau,\zeta),\ 0 \le \tau < +\infty,$$

где функция $P(\tau,\zeta)$, при фиксированном τ, голоморфна в круге E и имеет в нем положительную вещественную часть, изучалось П.П. Куфаревым[19,20,21,22] и получило название уравнения Левнера – Куфарева. Основываясь на выпуклости класса функций Каратеодори, И.Е. Базилевич[23], интегрируя уравнение Левнера – Куфарева, получил интегральное представление подкласса класса S, включающее звездные и выпуклые отображения. А.П. Сыркашев[24] в частных случаях свел уравнение Левнера – Куфарева к уравнению Бернулли и к уравнению Рикатти.

Д.Б. Прохоров[25], С.А. Копанев[26], И.А. Александров[27] исследовали вариационные задачи, сочетая метод параметрических представлений с методом оптимального управления Л.С. Понтрягина.

Объединение метода внутренних вариаций Шифера – Голузина и метода параметрических представлений Левнера дано П.П. Куфаревым[28].

---

[17] Куфарев П.П. К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей // ДАН СССР. – 1950. – Т. 73. - № 5. – С. 881 – 884.

[18] Куфарев П.П., Фалес А.Э. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 81, № 6. – С. 995 – 998.

[19] Куфарев П.П. К теории однолистных функций // Доклады АН СССР. – 1947. – Т. 57, № 8. – С. 751 – 754.

[20] Куфарев П.П. Об интегралах простейшего дифференциального уравнения с подвижной полярной особенностью правой части // Ученые записки Московского университета. – 1946. – Т. 1. – С. 35 – 48.

[21] Куфарев П.П. Об одной системе дифференциальных уравнений // Ученые записки Томского университета. – 1948. – Т. 8. – С. 61 – 72.

[22] Куфарев П.П. Об одном специальном семействе однолистных областей // Ученые записки Томского университета. – 1947. – Т. 5. – С. 22 – 36.

[23] Базилевич И.Е. Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Левнера – Куфарева // Матем. сб. – 1955. – Т. 37 (79), № 3.

[24] Сыркашев А.Н. Об одном случае интегрирования уравнения Левнера – Куфарева // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 21. Лобачевские чтения – 2003. материалы третьей всероссийской молодежной научной школы-конференции. Казань 2003. С. 204 –206.

[25] Прохоров Д.В., Романова С.В. Локальные экстремальные задачи для ограниченных аналитических функций без нулей // Изв. РАН. Сер. матем. – 2006. – Т. 70. – Вып. 4. – С. 209 – 224.

[26] Копанев С.А., Александров И.А., Завозин Г.Г. Оптимальное управление в задачах о коэффициентах однолистных функций // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т.12, №4.

[27] Александров И.А. Вариационный метод решения экстремальных проблем в некоторых классах аналитических функций. // Доклады АН СССР. – 1963. –Т.151, №5. – С. 999 – 1002.

[28] Куфарев П.П. О методе параметрических представлений и вариационном методе Г.М. Голузина // Труды III Всероссийского математического съезда. – М., 1965. – Т. 1. – С. 85 – 86.

М.Р. Куваев[29] распространил уравнение Левнера на автоморфные функции, И.А. Александров – на однолистные отображения кругового кольца, Л.М. Бер[30] – на области с несколькими разрезами, Л.С. Копанева[31] – на отображения с симметрией переноса.

Установлены связи между методом параметрических представлений и вариационно-параметрическим методом М.А. Лаврентьева.

В недавних работах И.А. Александрова[32,33] показано, что в рамках метода параметрических представлений можно получить основную вариационную формулу Голузина.

В работах Н.А. Лебедева и И.М. Милина[34] был разработан «аппарат формального экспоненцирования», позволяющий перенести ограничения с логарифмических коэффициентов на тейлоровские коэффициенты однолистных функций, в частности, позволяющий оценивать коэффициенты функции $f \in S$ следующими неравенствами:

$$\left|c_n(f)\right| \le n e^{-M_n(f)}, \; n = 2,3,\ldots,$$

где

$$M_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - k^2\left|\gamma_k(f)\right|^2\right)\frac{n-k}{k}, \qquad \frac{1}{2}\ln\frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(f)z^n,$$

$\gamma_n(f)$ – логарифмические коэффициенты функции f.

Полное решение задачи Бибербаха о коэффициентах функций класса S было получено Л.де Бранжем[35,36] в 1984 году. Важной частью предложенного им доказательства стал этап с использованием метода параметрических представлений.

Функционал И.М. Милина Бранжем рассматривался как предельное значение при $\tau = 0$ функции

[29] Куваев М.Р. Обобщения уравнения типа Левнера для автоморфных функций // Труды Томск.ун-та. – 1959. – Т. 44. – С. 27 – 30.

[30] Бер Л.М. Усиление теоремы скольжения // Вестник Томского гос. Университета. – 2003. – Т. – 280 (декабрь). – С. 8 – 11.

[31] Копанева Л.С. Параметрическое представление отображений с симметрией переноса // Исследования по математическому анализу и алгебре. – Томск. – 2001. – С. 135 – 144.

[32] Александров А.И., Александров И.А. Вариационная формула Голузина для Левнеровких отображений круга // Вестник Томского государственного университета . – 2008. – Т. 1 (2). – С. 5 – 10.

[33] Александров И.А. О связи метода параметрических представлений с методами Голузина и Куфарева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2008. – Т. 2 (3). – С. 5 – 9.

[34] Лебедев Н.А., Милин И.М. Об одном неравенстве // Вестник Ленинградского университета. – 1965. – Т. 19. – С. 157 – 158.

[35] Louis de Branges A proof of the Bieberbach conjecture// Acta Mathematica. – 1985. – T. 154. – C. 137 – 152.

[36] Louis de Branges A proof of the Bieberbach conjecture// LOMI preprintes, E – 5 – 84. S. 1 – 21.

$$nB_n(\tau)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-k^2\left|\gamma_k(\tau)\right|^2\right)Y_{n-k,n}(\tau),$$

где $\gamma_n(f)$ – логарифмические коэффициенты функции $e^{-\tau}\Psi(\tau,z)$, а

$$Y_{s,n}(\tau)=\sum_{j=1}^{s}\frac{(-1)^{s-j}}{n-j}\binom{2n-2j}{s-j}\binom{2n-j}{j-1}e^{-(n-j)\tau},\ s=n-k,$$

– компоненты решения некоторой системы уравнений. Бранж, пользуясь работой Р. Аски и Г. Гаспера[37] установил, что

$$Y'_{n-k,n}(\tau)<0,$$

и доказал гипотезу Милина[38], то есть показал, что $M_n(f)\geq 0$. В силу леммы Лебедева – Милина имеем $|c_n|\leq n$.

В 1991 году Вайнштейн[39] представил другое доказательство гипотезы Бибербаха без использования результата Аски и Гаспера. Доказательство Вайнштейна сводилось к установлению знака введенных в рассмотрение специальных функций $\Lambda_s^n(\tau)$. Тодоров[40] и Вильф[41] независимо друг от друга показали, что функции $\Lambda_s^n(\tau)$ связаны с функциями Бранжа следующим соотношением: $Y'_{s,n}(\tau)=-s\Lambda_s^n(\tau)$.

И.А. Александровым, А.И. Александровым, Т.В. Касаткиной[42,43], Г.А. Юферовой[44,4546] исследованы связи $Y_{k,n}(\tau)$ с задачами конформных отображений.

Метод параметрических представлений получил дальнейшее развитие и выделился среди всех методов исследования экстремальных

---

[37] Аски Р., Гаспер Г. (Askey R., Gasper G.) Positive Jacoby polynomial sums // Amer. J. Math. – 1976. – Т. – 98. – С. 709 – 737.

[38] Милин М.М. Оценка коэффициентов однолистных функций // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 160, № 4. – С. 769 – 771.

[39] Weinstein L. The Bieberbach conjecture // International Mathematics Reseach Notices. – 1991. – Т. – 5. – С. 61 – 64.

[40] Todorov P. A simple proof of the Bieberbach conjecture // Bull. Cl. Sci.,Acad. R. Belg. – 1992. – Т. 12, №3. – С. 335 – 356.

[41] Wilf H. A footnote on two proof of the Bieberbach – de Branges Theorem // Bull. London Math. Soc. – 1994. – Т. – 26. – С. 61 – 63.

[42] Александров И.А., Александров А.И., Касаткина Т.В. Функционал Милина и полиномы де Бранжа // Актуальные проблемы современной математики. Сб. научных трудов. – Новосибирск: НИИ МИДО НГУ. – 1997. – Т.3 – С. 13 – 18.

[43] Александров И.А., Касаткина Т.В. Функционал Милина // Исследования по математическому анализу и алгебре. – Томск. – Томский университет. – 2000. – С. 11 – 15.

[44] Александров И.А., Юферова Г.А. К доказательству неравенства Бибербаха // Вестник Томского государственного университета. – 2007. – № 297, апрель. – С 141 – 145.

[45] Юферова Г.А. Об одном семействе однолистных отображений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2009. – Т. 1 (5). – С. 47 – 53.

[46] Юферова Г.А. Уравнение Левнера и ортогональные многочлены // Вестник Томского государственного университета. – 2007. – № 298, май. – С. 121 – 124.

задач на классах однолистных отображений как единственный в настоящее время приведший к решению задачи Бибербаха о коэффициентах.

Цель работы. Целью настоящей работы является получение новых случаев интегрирования уравнений Левнера и Левнера – Куфарева, исследование проблемы Бибербаха о коэффициентах, исследование полиномов Бранжа с позиции теории конформных отображений и теории классических ортогональных многочленов, а также установление возможной связи экстремальной для ряда вариационных задач функции Кебе с классическими ортогональными многочленами и функцией Бранжа.

Методы исследования. Основные результаты диссертации доказаны с использованием метода параметрических представлений Левнера, методов вещественного и комплексного анализа, методов теории функций комплексного переменного, методов геометрической теории конформных отображений, методов теории дифференциальных уравнений и теории ортогональных многочленов.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- Получены два семейства однолистных конформных отображений круга, соответствующих указанных автором семейства управляющих функций в уравнении Левнера, и как следствие даны экстремальные функции в теореме вращения, а также усилен известный пример Куфарева об отображении круга на круг с исключенной луночкой.
- В дополнение к известной формуле Базилевича получено интегрированием уравнения Левнера – Куфарева семейство однолистных отображений круга на специальные круговые многоугольники.
- Доказана теорема о разложении в степенной ряд функции, полученной подстановкой в степенной ряд функции Кёбе, а также ее обобщения и на ее основе дан способ представления основных классических ортогональных многочленов через гипергеометрические ряды (полиномы) Гаусса.
- Разработано доказательство постоянства знака экспоненциальных многочленов Бранжа, использующее соотношения между многочленами Чебышева, Лежандра и Гегенбауэра.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они относятся к геометрической теории функций комплексного переменного, дифференциальных уравнений и ортогональных многочленов. В дальнейшем эти результаты могут быть использованы специалистами по теории функций и комплексному анализу.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на международной научной конференции "Студент и научно-технический прогресс" (апрель 2006 – 2009 гг., Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск), на Конференции, посвященной 300-летию со дня рождения Леонарда Эйлера (апрель 2007 г., Томский государственный университет, г. Томск), на Восьмой Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (июнь 2007г., Казанский государственный университет, г. Казань), на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2008» (апрель 2008г., Московский государственный университет, г. Москва), на IV Петрозаводской Международной конференции по комплексному анализу (июнь 2008 г., Петрозаводский государственный университет, г. Петрозаводск), на Всероссийской конференции по математике и механике (сентябрь 2008 г., Томский государственный университет, г. Томск), на семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН «Теория функций комплексного переменного» под руководством профессора В.В. Асеева, профессора А.В. Сычева (апрель 2009 г., Новосибирск).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах автора, приведенных в конце автореферата, одна из которых выполнена в соавторстве с научным руководителем И.А. Александровым.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых каждая на три параграфа, и списка литературы из 76 наименований. Общий объем диссертации составляет 83 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Во введении изложена история вопроса, проведен обзор результатов, связанных с тематикой исследования, сформулированы основные результаты.

Глава 1. В первой главе приводятся новые случаи интегрируемости уравнения Левнера и уравнения Левнера – Куфарева.

В первом параграфе первой главы получено решение $\zeta(\tau,z,\mu)$ уравнения Левнера с заданной управляющей функцией $\mu(\tau)=e^{-2i\varphi}\lambda^3(\tau,\varphi)$, где $\lambda(\tau,\varphi)$ дается формулой $\lambda=\lambda(\tau,\varphi)=\cos\varphi\cdot e^{-\tau}+i\sqrt{1-\cos^2\varphi\cdot e^{-2\tau}}$, и с начальным условием $\zeta(0,z,\mu)=z$, $z\in E$.

Теорема 1.1. *Функция*

$$\zeta(\tau,z,\mu)=\frac{\lambda e^{-2i\varphi}}{1+\lambda^2}\left[\frac{1}{D}+1+\lambda^2-\frac{\sqrt{1+\left(1-\lambda^4\right)D}}{D}\right],$$

где

$$D = D(z,\varphi) = \frac{z-\cos\varphi}{\cos\varphi}\frac{1}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2},$$

при фиксированном τ, $0<\tau<+\infty$, *осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга при* $\varphi\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ *в единичный круг* $\{\zeta\in\mathbb{C};|\zeta|<1\}$ *с разрезом, начинающимся в точке* $\zeta_1=\zeta\left(\tau,e^{i\varphi},\mu\right)$ *и оканчивающемся в точке на единичной окружности, а при* $\varphi\in\{0,\pi\}$ *в единичный круг с выкинутой лункой, ограниченной дугой единичной окружности и дугой кривой, лежащей в единичном круге. При этом* $\zeta(\tau,0,\mu)=0$, $\zeta_z'(\tau,0,\mu)=e^{-\tau}$.

Функция

$$f(z,\varphi)=\frac{z-\cos\varphi\cdot z^2}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2},\ \varphi\in[0,2\pi),\ z\in E,$$

является предельной для $e^{\tau}\zeta(\tau,z,\varphi)$ при $\tau\to+\infty$, дает точную оценку аргумента производной на классе S при $|z|\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ и осуществляет однолистное конформное отображение круга E на плоскость $w=u+iv$ с разрезом вдоль прямой $v=\mathrm{ctg}2\varphi\cdot u+\frac{1}{4\sin\varphi}$, начинающимся в точке $f\left(e^{i\varphi},\varphi\right)=\frac{i}{4\sin\varphi}$ и пересекающий ось абсцисс в точке $-\frac{\cos\varphi}{2\cos2\varphi}$.

Частным случаем теоремы 1.1 при $\varphi=0$ является пример Куфарева[47]

$$\zeta(\tau,z,\mu)=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\left\{z+\lambda^2-\lambda^2\sqrt{(1-z)\left(1-\frac{z}{\lambda^4}\right)}\right\}.$$

показывающий, что решение $\zeta(\tau,z,\mu)$ уравнения Левнера не всегда отображает круг E на круг $|\zeta|<1$ с разрезом.

Во втором параграфе первой главы решается задача о нахождении решения $\zeta(\tau,z,\mu)$ уравнения Левнера с управляющей функцией $\mu(\tau)=e^{i(\alpha+\beta\tau)}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, и с начальным условием $\zeta(0,z,\mu)=z$, $z\in E$.

[47] Куфарев П.П. Одно замечание об уравнении Левнера // Доклады АН СССР. – 1947. – Т. 57. – С. 655 – 656.

Теорема 1.2. *При фиксированном* τ, $0 \le \tau < +\infty$, *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *функция* $\zeta(\tau, z, \mu)$, *заданная неявно уравнением*

$$\frac{e^{\tau}\zeta}{\left(1+e^{-i(\alpha+\beta\tau)}\delta\zeta\right)^{\frac{2}{1+i\beta}}} = \frac{z}{\left(1+e^{-i\alpha}\delta z\right)^{\frac{2}{1+i\beta}}},$$

где $\delta = \dfrac{1-i\beta}{1+i\beta}$, *осуществляет однолистное конформное отображение круга* E *в единичный круг* $\{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| < 1\}$. *При этом* $\zeta(\tau, 0, \mu) = 0$, $\zeta_z'(\tau, 0, \mu) = e^{-\tau}$.

В частности, функция $\zeta(\tau, z, -1) = \dfrac{\left(1-\sqrt{1+4e^{-\tau}K(z)}\right)^2}{4e^{-\tau}K(z)}$ является решением дифференциального уравнения Левнера с управляющей функцией $\mu(\tau) = -1$. Она играет важную роль в исследовании проблемы коэффициентов.

В третьем параграфе первой главы решается задача о нахождении решения $\zeta(\tau)$ уравнения Левнера – Куфарева с начальным условием $\zeta(0) = z$, $z \in E$ и

$$P(\tau, z, t, a) = \left[t + (1-2t)ae^{-\tau}\right]\frac{1-z}{1+z} + \left[1 - t - (1-2t)ae^{-\tau}\right]\frac{1+z}{1-z}, \ z \in E.$$

Теорема 1.3. *При любых* a, t *функция*

$$\zeta(\tau) = \frac{1 - 2Ae^{-\tau}w - \sqrt{\left(1-2Ae^{-\tau}w\right)^2 - 4e^{-2\tau}w^2}}{2e^{-\tau}w}, \ 0 \le \tau < +\infty,$$

где

$$w = w(z) = \frac{z}{1+2(1-2t)(1-a)z+z^2}, \ A = (1-2t)\left(1-ae^{-\tau}\right),$$

осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга на круговой шестиугольник с границей, образованной единичной окружностью и двумя отрезками вещественной оси.

Функция

$$H(z, t, a) = \frac{z}{1+2(1-2t)(1-a)z+z^2}$$

является предельной для $e^{\tau}\zeta(\tau)$ при $\tau \to \infty$. Она принадлежит классу S и осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга E на область, представляющую собой плоскость $\mathbb{C}$ с двумя разрезами вдоль вещественной оси: $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2-2(1-2t)(1-a)}\right], \left[\dfrac{1}{2+2(1-2t)(1-a)}, +\infty\right)$. Она используется в третьей главе при установлении знака функции Бранжа.

Глава 2. Во второй главе получены формулы, связывающие классические ортогональные полиномы Лежандра, Чебышева, Якоби, Гегенбауэра с решением $\zeta(\tau, z)$ уравнения Левнера с постоянным управлением $\mu(\tau) = -1$. Они представляют композицию простейших отображений с функцией Кебе.

В первом параграфе второй главы доказывается теорема о подстановке обобщенной функции Кебе $\dfrac{2^{\frac{2}{p}} xz}{(1-z^p)^{\frac{2}{p}}}$, $p = 1, 2, \ldots$, в произвольный степенной ряд $Q_p(u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^{(p)} u^{kp}$.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $Q_p(u)$ *голоморфна в области* D, $0 \in D$, *и имеет разложение в ряд вида:*

$$Q_p(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(p)} u^{kp}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Тогда при фиксированном $x \in (0,1)$ *разложение функции*

$$\Phi_p(z) = \frac{1}{1-z^p} Q_p\left(-\frac{2^{\frac{2}{p}} xz}{(1-z^p)^{\frac{2}{p}}}\right)$$

по степеням переменной z *имеет вид*

$$\Phi_p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{(p)}(x) z^{mp},$$

где

$$g_m^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k^{(p)} (-1)^{k(p+1)} \frac{(-m)_k (m+1)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k (1)_k} x^{kp}$$

представляет собой полином степени m, *если* $b_m^{(p)} \neq 0$.

В частности, при $p = 1$ *и фиксированном* $x \in (0,1)$ *разложение функции*

$$\Phi(z) = \frac{1}{1-z} Q\left(-\frac{4xz}{(1-z)^2}\right), \text{ где } Q(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k,$$

по степеням z *имеет вид*

$$\Phi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-m)_k\,(m+1)_k\,b_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k\,(1)_k}x^k z^m .$$

Ранее теорема 2.1 для $p=1$ была доказана Г.Д. Садритдиновой[48].

Во втором параграфе второй главы приводится ряд примеров, показывающих связь между экстремальной в ряде вариационных задач на классе S функцией Кебе и классическими ортогональными полиномами Чебышева, Лежандра, Гегенбауэра, Якоби, а также с некоторыми другими функциями. Показано, что при $x\in(0,1)$, $m=0,1,2,\ldots$:

$$P_m(1-2x)={}_2F_1\left[\begin{matrix}-m,m+1\\1\end{matrix};x\right],$$

$$U_m(1-2x)=\sum_{k=0}^{m}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-k,k+1\\\frac{1}{2}\end{matrix};x\right],$$

$$C_m^{\nu}(1-2x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(2\nu-1)_k}{(1)_k}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-m+k,m-k+1,\nu\\\frac{1}{2},1\end{matrix};x\right],$$

$$T_m(1-2x)={}_2F_1\left[\begin{matrix}-m,m\\\frac{1}{2}\end{matrix};x\right].$$

В третьем параграфе второй главы получены ряды по степеням z для степеней решения $\zeta(\tau,z)$ уравнения Левнера и для производных от $\ln\zeta(\tau,z)$ по τ и по z.

Теорема 2.2. *Решение* $\zeta(\tau,z)$, $0\le\tau<+\infty$, *уравнения Левнера*

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\zeta\frac{1-\zeta}{1+\zeta},\quad 0\le\tau<+\infty,$$

с начальным условием $\zeta(0,z)=z$, *возведенное в степень* m, *имеет разложение в ряд по степеням* z *следующего вида*:

$$\zeta^m(\tau,z,-1)=e^{-m\tau}\sum_{l=m}^{\infty}\binom{l+m-1}{2m-1}{}_2F_1\left[\begin{matrix}m+l,m-l\\2m+1\end{matrix};e^{-\tau}\right]z^l,\quad m\in\mathbb{N}.$$

Получено дифференциальное соотношение между степенями решения уравнения Левнера с постоянной управляющей функцией.

Теорема 2.3. *При* $m=1,2,\ldots$ *имеет место равенство*

48 Сатритдинова Г.Д. Об одном случае интегрирования уравнения Левнера с симметрией вращения// Доклады РАН. – 1999. – Т. 368. – 462 – 463.

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{m+1}\frac{d\zeta^{m+1}(\tau,z)}{d\tau}+\frac{1}{m}\frac{d\zeta^{m}(\tau,z)}{d\tau}\right]=\frac{d\zeta^{m+1}(\tau,z)}{d\tau}-\frac{d\zeta^{m}(\tau,z)}{d\tau}.$$

Глава 3. В третьей главе исследуется проблема Бибербаха о коэффициентах. Получена система дифференциальных уравнений для коэффициентов разложений функций $\frac{z}{(1-z)^2}\frac{d\zeta^m(\tau,z)}{d\tau}$ по степеням z. Показано совпадение этой системы с системой дифференциальных уравнений для нахождения экспоненциальных полиномов Бранжа, используемых в доказательстве справедливости гипотезы Бибербаха о коэффициентах. Дается вывод формулы суммирования для полиномов Чебышева второго рода и получено представление производных функций Бранжа $Y'_{k,n}(\tau)$ не в виде суммы знакочередующихся слагаемых, как оно первоначально было получена Бранжем, а в виде суммы со слагаемыми одного знака. Получена связь полиномов Чебышева второго рода с полиномами Бранжа. Это позволяет провести исследование указанных полиномов с позиции теории конформных отображений и получить неравенство $B_n(\tau)>0$, а значит, $M_n(f)\geq 0$.

В первом параграфе третьей главы рассмотрена определенная в $[0,\infty)\times E$ последовательность $\{W_m(\tau,z)\}_{m=0}^{\infty}$, где

$$W_0(\tau,z)=-K(z)\frac{d\ln\zeta(\tau,z)}{d\tau},\ W_{m+1}(\tau,z)=\zeta(\tau,z)W_m(\tau,z),\ m=0,1,\ldots$$

Пользуясь теоремой 2.3, устанавливается связь между элементами этой последовательности: *при* $m=0,1,\ldots$ *имеет место равенство*

$$\frac{\partial}{\partial\tau}W_m(\tau,z)+\frac{\partial}{\partial\tau}W_{m+1}(\tau,z)=(m+1)W_{m+1}(\tau,z)-mW_m(\tau,z).$$

Для коэффициентов функций $W_m(\tau,z)=\sum\limits_{l=m+1}^{\infty}Q_{l,m}(\tau)z^l$, $m=0,1,\ldots$, получена система дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\tau}Q_{n,n-1}(\tau)=-(n-1)Q_{n,n-1}(\tau),\ s=1,$$

$$\frac{d}{d\tau}Q_{n,n-s}(\tau)=2\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^{s+j+1}(n-j)Q_{n,n-j}(\tau)-(n-s)Q_{n,n-s}(\tau),\quad \mathrm{s}=2,\ldots,\mathrm{n}-1,\quad \mathrm{n}\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$$

Во втором параграфе третьей главы установлена связь экспоненциальных полиномов Бранжа

$$Y_{s,n}\left(\tau,\frac{s}{n-s}\right)=\sum_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{s-r}}{n-r}\binom{2n-2r}{s-r}\binom{2n-r}{r-1}e^{-(n-r)\tau},\ s=1,2,\ldots,n-1,\ n=1,2,\ldots$$

с решением $\zeta(\tau,z)$ уравнения Левнера и функцией Кебе.

Теорема 3.1 *Производная функции Бранжа* $Y_{s,n}\left(\tau,\frac{s}{n-s}\right)$ *и коэффициенты* $Q_{n,n-s}(\tau)$ *разложения функции* $W_m(\tau,z)$ *связаны равенством:*

$$Q_{n,n-s}(\tau)=-Y'_{s,n}\left(\tau,\frac{s}{n-s}\right).$$

В третьем параграфе третьей главы рассматриваются функции

$$H_\gamma(z)=\frac{z}{1-2\cos\gamma\cdot z+z^2},\qquad H_\theta(\zeta(\tau,z,-1)),$$

где $\cos\gamma=\left(1-e^{-\tau}\right)+e^{-\tau}\cos\theta$.

Показана связь этой функции с последовательностью $\{W_m(\tau,z)\}_{m=0}^{\infty}$:

$$H_\gamma(z)=W_0(\tau,z)+2\sum_{m=1}^{\infty}W_m(\tau,z)\cdot\cos m\theta$$

и с ортогональными полиномами Чебышева:

$$H_\gamma(z)=\sum_{m=1}^{\infty}U_{m-1}(\cos\gamma)z^m.$$

Получена связь коэффициентов разложения функции $W_m(\tau,z)$ с полиномами Чебышева:

$$C^1_{m-1}(\cos\gamma)=U_{m-1}(\cos\gamma)=Q_{m,0}(\tau)+2\sum_{l=1}^{m-1}Q_{m,l}(\tau)\cdot\cos l\theta,\ m=1,2,\ldots \quad (10)$$

Дан вывод формулы суммирования для полиномов Чебышева второго рода и ее применение к исследованию экспоненциальных полиномов Бранжа:

Лемма 3. *Имеет место функциональное соотношение*

$$U_n\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right)=C^1_n\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right)=\sum_{j=0}^{n}D_{j,n}\left(1-x^2\right)^{\frac{j}{2}}\left(1-y^2\right)^{\frac{j}{2}}\times$$
$$\times C^{j+1}_{n-j}(x)C^{j+1}_{n-j}(y)P_j(\zeta),$$

где постоянная

$$D_{j,n}=\frac{4^j(n-j)!(j!)^2(2j+1)}{(n+j+1)!}.$$

Теорема 3.2 *Коэффициенты* $Q_{m,l}(\tau)$, $0\le\tau<+\infty$, *в разложении* (10) *функции* $U_m(\cos\gamma)$ *неотрицательны.*

Следствие 1. *Имеет место неравенство* $Y'_{s,n}\left(\tau,\frac{s}{n-s}\right)<0$, $0<\tau<+\infty$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $s=1,2,\dots,n$.

Следствие 2. *Экспоненциальный полином Бранжа* $Y_{s,n}\left(\tau,\frac{s}{n-s}\right)$ *на* $(0,+\infty)$ *положительно определен.*

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Александрову Игорю Александровичу за постановку задач и постоянное внимание ко всем этапам данной работы.

Работы автора по теме диссертации

1. Александров И.А. К доказательству неравенства Бибербаха / И.А. Александров, Г.А. Юферова // Вестник Томского государственного университета. – 2007. – № 297. – С. 141 – 145. (поступила в научную редакцию Вестника ТГУ 11 декабря 2006 г., принята к печати 18 декабря 2006 г. Входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов ВАК (2001 -2005 гг. Письмо ВАК от 30.11.2006 г.)
2. Юферова Г.А. Уравнение Левнера и ортогональные многочлены // Вестник Томского государственного университета. – 2007. – № 298. – С. 121 – 124. (поступила в научную редакцию Вестника ТГУ 22 декабря 2006 г. Входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов ВАК (2001 -2005 гг. Письмо ВАК от 30.11.2006 г.)
3. Юферова Г.А. Об одном семействе однолистных отображений //Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2009. – №1 (5). – С. 47 – 53.
4. Юферова Г.А. Об одной системе дифференциальных уравнений // Материалы XLIV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», секция Математики, Новосибирский государственный университет. Новосибирск, апрель 2006 г. – Новосибирск, 2006. – С. 33 – 34.
5. Юферова Г.А. Уравнение Левнера, классические ортогональные многочлены и их связь // Материалы XLV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирский государственный университет. Новосибирск, 10-12 апреля 2007 г. Новосибирск, 2007. – С. 197 – 198.
6. Юферова Г.А. К решению задачи Бибербаха о коэффициентах // Материалы конференции, посвященной 300 летию со дня рождения Леонарда Эйлера 1707-1783, Томский государственный университет. Томск, 16-21 апреля 2007 г. – Томск, 2007. – С. 98 – 100.

7. Юферова Г.А. Левнеровские семейства областей, проблема коэффициентов и ортогональные многочлены // Материалы Восьмой международной Казанской летней научной школы-конференции. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Казань, июнь 2007г. – Казань, 2007. – С. 285 – 286.
8. Юферова Г.А. К доказательству Л. Бранжа теоремы о коэффициентах // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2008», МГУ. Москва, 21-26 апреля 2008г. М., 2008. – С. 64.
9. Юферова Г.А. Решение уравнения Левнера – Куфарева // XLVI Международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирский государственный университет. Новосибирск, 26-30 апреля 2008 г. – Новосибирск, 2008. – С. 227 – 228.
10. Юферова Г.А. К вопросу об оценке функционала Милина // IV Петрозаводская Международная конференция по комплексному анализу, Петрозаводский государственный университет. Петрозаводск, 29 июня – 5 июля, 2008 г. – Петрозаводск, 2008. – С. 46.
11. Юферова Г.А. Об интегрируемости уравнения Левнера–Куфарева // Всероссийская конференция по математике и механике, Томский государственный университет. Томск, 22 – 25 сентября, 2008 г. – Томск, 2008.
12. Юферова Г.А. Экстремальные функции в теореме вращения на классе S // XLVII Международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирский государственный университет. Новосибирск, 11-15 апреля, 2009 г. Новосибирск, 2009. – С. 117 – 118.

10 -

Заказ 529. Тираж 100.
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. 533018.